DOI: 10.22067/jacsm.2022.71335.1040 *https://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir/?lang=en*

Calculating the Added Mass Matrix of an Airship Using Boundary Element Method*

Research Article

Ali Jafarian[1] Mohammadreza Alavi Tabatabaei[2]
Saeed Shakhesi[3]

1. Introduction

Airships are controllable systems and can perform various maneuvers in longitudinal and lateral directions. For this reason, it is used in various works such as monitoring, telecommunication, environmental, as well as advertising and entertainment applications.

Due to the movement of the airship, the guidance and control of this system in different directions is very important and in simulating the flight mechanics, all forces on the airship should be considered. When the motion of a system in a fluid is accelerated, it will support additional forces besides the drag force. These forces are considered equivalent to the mass and moment of inertia added to the body.

One of the most suitable methods for determining the added mass of an airship is the boundary element method. In the boundary element method, the simulation is performed by solving the ideal flow and arranging the elements at the boundary. In classical CFD such as finite element or finite volume methods, the number of computational meshes is greatly increased because the entire solution area is meshed, but in the boundary element method only the surface of the object is meshed and the number of computational meshes decreases dramatically.

In this study, the boundary element code is prepared in Fortran language and the geometry of the body is divided into triangular panels at the surface by using Gambit software. The computational network file will be added to the code as input. At first, to validate the computational code, the added mass matrix for the sphere and two ellipses with different aspect ratios are simulated. The calculation code is then used to calculate the added mass matrix of the two airships.

2. Added mass

The added mass of an object will be important in cases where the density of the object is in the order of the density of the fluid around the object. For example, in the movement of airships and marine engineering, these forces must be calculated. Therefore, the amount of added mass in aircrafts, missiles, drones, and other similar systems is not calculated. On the other hand, in systems such as airships, submarines and torpedoes, the added mass must be calculated and taken into account in dynamic simulations.

In general, when a force is applied to an object in a certain direction, the direction of motion and also the acceleration of the object is not limited to the direction of the force. Therefore, the acceleration of the body will be in three directions, and in addition, it will be also subjected to three angular accelerations. As a result, the added mass matrix will be an $M_{6\times6}$ matrix that shows the effect of each motion on forces and moments.

3. Results

In general, an airship has various components such as hull, tail, and gondola. By examining different airships, it can be seen that the two profiles NPL and GNVR are common profiles that have been used in the design of the airship hull. In this study, both geometries have been used to simulate an airship. The geometry of NPL consists of two ovals with the same small diameter and different large diameters, and the ratio of large diameter to the small diameter of the body is 3.85. Instead, the GNVR geometry profile consists of three different curves. An oval is used at the tip of the body, a circular profile is used in the middle part and the end part is parabolic where the ratio of large diameter to small diameter is equal to 3.05.

Simulation of boundary element airship

In this step, the simulation of the boundary element for the airship with the tail assembly and gondola is performed and the added mass matrix coefficients are extracted. Figure 1 shows the computational network created to simulate an airship with two profiles. Here, the hull volume of the two airships is the same. As shown in this figure, finer elements are used for the wings and the gondola.

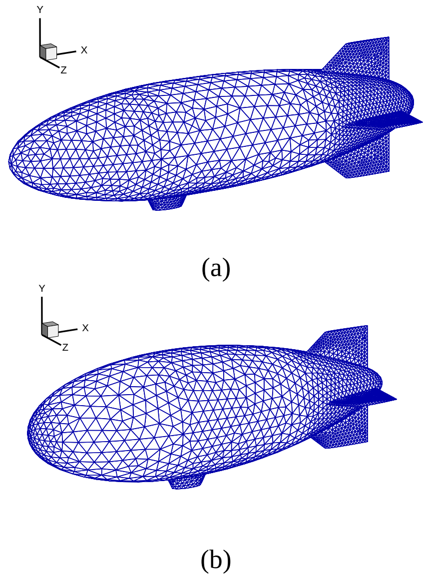


Figure 1. Triangular meshes created on an airship (a) NPL geometry (b) GNVR geometry

Table 1 shows the results for the values of the added matrix elements with NPL and GNVR profiles. In general, when the hull is without a wing, the airship does not resist rolling and the value of the A_{44} element is zero.

* Manuscript received: 06 July 2021; Revised, 26 February 2022, Accepted, 27 July 2022.
[1]. Corresponding author. PhD, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran. **Email:** a.jafarian@isrc.ac.ir.

[2] . Master of Science, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.

[3] . Associated Professor, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.

Here the value of the A_{44} element will not be zero and the value of the two non-diagonal elements A_{35} and A_{26} will be significant. Other non-diagonal elements will be almost zero.

Table 1. Dimensionless coefficients of added mass matrix for airship with NPL and GNVR hull profiles

Added Mass Element	Airship with GNVR geometry	Airship with NPL geometry
A_{11}	0.01003	0.00426
A_{22}	0.07885	0.05563
A_{33}	0.07975	0.05699
A_{44}	0.000065	0.000053
A_{55}	0.003043	0.00257
A_{66}	0.00303	0.00249
A_{26}	-0.00042	0.00130
A_{35}	0.00047	-0.0015

Figure 2 presents a comparison between some added matrix elements for airship with two profiles, NPL and GNVR. As it can be seen, the values of the elements for the GNVR profile are larger than the corresponding values in the NPL profile. Moreover, for a more accurate comparison of the differences between the two geometries, the percentage difference of the added matrix elements between the two profiles is presented in Table 2. The differences are greater for the A_{11} element and the non-diameter elements A_{26} and A_{35} than for other elements, and the A_{66} and A_{55} elements are the least different.

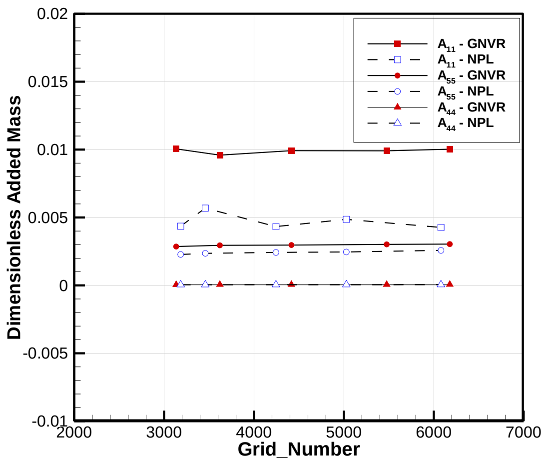


Figure 2. Comparison of results A_{11}, A_{44}, A_{55} between two airships with NPL and GNVR hulls for different computing networks

Table 2. Percentage difference of results for added mass values for two different NPL and GNVR hulls

Added Mass Element	$\frac{\lvert A_{ij,NPL} - A_{ij,GNVR}\rvert}{\lvert A_{ij,NPL}\rvert} \times 100$
A_{11}	135.1
A_{22}	`
A_{33}	39.9
A_{44}	22.4
A_{55}	18.1
A_{66}	21.4
A_{26}	132.4
A_{35}	130.8

4. Conclusion

In this study, the boundary element method was used to determine the added mass of the airship. For this purpose, computational code was developed with the above method using Fortran language. The required computational network is created in a triangular shape on the surface of the object using Gambit software and is given as input to the code. First, to validate the computational code, the added mass matrix is simulated for usual geometries such as spheres and ellipses. The values obtained for spheres and ellipses are compared with the results of the analytical solution for the potential flow and the results are in good agreement with the analytical solution. The difference is less than 3% compared to the analytical solution.

The calculation code is then used for two airships with two profiles, NPL and GNVR. The above two profiles are modeled alone and with the tail assembly and gondola and the results of the added mass matrix elements are presented in the dimensionless form for each case. In the case of the hull alone, the coefficient A_{44} is zero, and by adding the wings, this element has a value that indicates the resistance of the wings to the movement of the airship's roll. Moreover, unlike elliptical geometry, where the non-diagonal coefficients are zero, in this case, due to the asymmetry to the yz plane, they will not be zero, and these values are also calculated for the airship. According to the results, all added mass elements of the airship with the GNVR hull are more than the NPL hull.

Since the boundary element method uses only the computational network at the body surface, the number of computational elements drastically reduced and as a result, the computational speed is much higher than the classical CFD methods. In addition, in the present method, by solving the potential flow, all coefficients of the added mass matrix are calculated at high speed, and the possibility of geometric optimization in the shape and dimensions of the control surfaces of the airship is provided.

DOI: 10.22067/jacsm.2022.71335.1040   https://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir/

تعیین ماتریس جرم افزوده کشتی هوایی با استفاده از روش المان مرزی*

علی جعفریان [۱]   محمدرضا علوی طباطبایی [۲]   سعید شاخصی [۳]

چکیده *در مقاله حاضر ماتریس جرم افزوده کشتی هوایی با استفاده از روش المان مرزی تعیین شده‌است. گسسته‌سازی معادلات حاکم بر روی شبکهٔ مثلثی بر روی سطح جسم انجام شده‌است. شبکهٔ محاسباتی بر روی سطح جسم با استفاده از نرم‌افزار گمبیت ایجاد شده و به‌صورت ورودی در کد المان مرزی نوشته شده به زبان فرترن به‌کار گرفته شده‌است. ابتدا به‌منظور صحه‌سنجی کد المان مرزی، ماتریس جرم افزوده برای هندسه‌های متداول مانند کره و بیضی‌گون با نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک ۲ و ۳/۸۵ انجام شده‌است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی المان مرزی کاملاً با مقادیر به‌دست آمده از حل تحلیلی تطابق دارند. سپس ماتریس جرم افزوده برای بدنهٔ کشتی هوایی با دو پروفیل NPL و GNVR که از پرکاربردترین پروفیل‌ها در بدنهٔ کشتی‌های هوایی است محاسبه شده‌است. در نهایت هندسهٔ کامل کشتی هوایی به همراه مجموعهٔ دم و سبد، با استفاده از دو پروفیل مختلف بدنه شبکه‌بندی شده‌است و ماتریس جرم افزوده برای کشتی هوایی در دو حالت به‌دست آمده‌است.*

واژه‌های کلیدی کشتی هوایی، روش المان مرزی، جرم افزوده.

مقدمه

کشتی‌های هوایی جزو سامانه‌های پرنده هستند که در دههٔ ۱۹۳۰ میلادی به دنیا عرضه شدند. در نمونه‌های اولیه، نیروی برآ به وسیلهٔ گاز هیدروژن تأمین می‌شده‌است. به دلیل قابلیت بالای اشتعال هیدروژن و سوانح هوایی در دهه‌های گذشته، استفاده از این سامانه‌ها برای مدت‌ها از دستور کار توسعه‌دهندگان کشتی‌های هوایی خارج شد. در دو دههٔ اخیر به علت استفاده از هلیم به جای هیدروژن و افزایش تکنولوژی در ساخت پوشش‌های پارچه‌ای با استحکام بالا و وزن کم، مجدداً سامانه‌های باد شونده مورد توجه دانشمندان علوم هوا و فضا قرار گرفته‌است [1].

کشتی هوایی یک سامانهٔ هدایت‌پذیر است و قابلیت انجام مانورهای مختلف در جهت طولی و عرضی را دارا است. به همین دلیل در مأموریت‌های مختلف به‌صورت کاربردهای پایشی، مخابراتی، زیست‌محیطی و نیز کاربردهای تبلیغاتی و تفریحی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌منظور مطالعه دقیق‌تر روند تکامل کشتی‌های هوایی طی سال‌های مختلف می‌توان به مراجع [1,2] مراجعه نمود.

با توجه به حرکت کشتی هوایی، هدایت و کنترل این سامانه در مسیرهای مختلف بسیار حائز اهمیت است و در شبیه‌سازی مکانیک پرواز باید تمامی نیروهای وارد به کشتی هوایی مد نظر قرار گیرد. زمانی که حرکت یک جسم در داخل سیال، یک حرکت شتاب‌دار باشد در این صورت جسم علاوه‌بر نیروی درگ متحمل نیروهای اضافی نیز خواهد شد. این نیروها به‌صورت معادل جرم و ممان اینرسیِ افزوده شده به جسم در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به آن‌که طراحی کشتی‌های هوایی به‌صورت تجربی دارای هزینه‌های بسیار بالایی است، استفاده از شبیه‌سازی برای دست‌یابی به طراحی بهینه و نیز مدل‌سازی به‌منظور اعمال تغییرات و بهینه کردن پارامترهای طراحی امری ضروری است. روش‌های مختلف شبیه‌سازی عددی وجود دارد که می‌توان از این روش‌ها برای مدل‌سازی جریان در کشتی هوایی استفاده کرد. به‌منظور ساده‌سازی و استفاده از روش‌های سرعت بالا می‌توان فرض وجود جریان ایده‌آل را مطرح کرد و از این فرض برای

---

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۰/۴/۱۵ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۱/۴/۵ می‌باشد.
(۱) نویسنده مسئول، دکتری، مهندسی مکانیک، پژوهشگاه فضایی ایران
(۲) کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، پژوهشگاه فضایی ایران
(۳) دانشیار، مهندسی مکانیک، پژوهشگاه فضایی ایران
Email: a.jafarian@isrc.ac.ir

شبیه‌سازی استفاده نمود. البته این فرض خطاهایی را نیز در شبیه‌سازی دخیل خواهد نمود اما به‌طور چشم‌گیری سبب افزایش سرعت شبیه‌سازی خواهد شد. یکی از روش‌هایی که از فرض وجود جریان ایده آل برای شبیه‌سازی استفاده می‌کند روش المان مرزی است. در روش المان مرزی، شبیه‌سازی با استفاده از حل جریان ایده‌آل و چیده‌شدن المان‌ها در مرز انجام می‌شود و میزان خطایی که در محاسبهٔ جرم افزوده به‌وجود خواهد آمد قابل قبول خواهد بود. از طرف دیگر در روند طراحی معمولاً هندسهٔ بدنه و متعلقات و نیز جانمایی اجزای مختلف تغییر می‌کند. لذا استفاده از روش‌های پیچیدهٔ محاسباتی برای تعیین ضرایب جرم افزوده و نیروهای وارده بر کشتی‌های هوایی بسیار پرهزینه و زمان‌بر خواهد بود و استفاده از روش‌های پرهزینهٔ محاسباتی روند طراحی را با اخلال همراه خواهد کرد. روش المان مرزی روشی سریع و پرکاربرد در تعیین این نیروها است و در بسیاری از طراحی‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌است [3]. به عنوان مثال در سال ۱۹۸۱ اَو و بربیا از روش المان مرزی برای پیش‌بینی ایجاد موج در جریان پتانسیل سطح آزاد پرداختند [4]. در سال ۲۰۰۰ چویی و همکاران از این روش برای محاسبه نیروهای امواج که بر شناورهای سطحی با هندسه‌های مختلف ایجاد می‌شود استفاده کردند [۵] و در سال ۲۰۰۵ ژو و همکاران اثر جریان‌های کم عمق را بر روی جرم افزودهٔ استوانه با سطح مقطع‌های مختلف مورد بررسی قرار دادند [6]. هم‌چنین لین و لیائو در سال ۲۰۱۱ مقادیر ماتریس جرم افزوده زیردریایی را با استفاده از روش المان مرزی محاسبه نمودند [7]. قاسمی و یاری نیز در سال ۲۰۱۱ از روش المان مرزی برای محاسبهٔ ماتریس جرم افزودهٔ پروانهٔ دوار و هیدروفویل استفاده نمودند [8]. هم‌چنین میرزایی و همکاران نیز در سال ۲۰۱۷ از روش المان مرزی برای محاسبه جرم افزودهٔ زیردریایی سابوف استفاده کردند و ضرایب قطری و غیرقطری ماتریس جرم افزوده را محاسبه نمودند [9].

از طرف دیگر در برخی از مراجع، به‌منظور ساده‌سازی و تخمین سریع ضرایب، هندسهٔ بدنهٔ کشتی هوایی به‌صورت یک بیضی‌گون با حجم معادل در نظر گرفته می‌شود. از آن‌جا که حل تحلیلی جریان پتانسیل برای بیضی‌گون وجود دارد، می‌توان جرم افزودهٔ کشتی‌های هوایی را با بیضی‌گون معادل تقریب زد. در بسیاری از مدل‌سازی‌های دینامیکی کشتی‌های هوایی، از روش بیضی‌گونِ معادل برای شبیه‌سازی مکانیک پرواز استفاده شده‌است. به عنوان مثال گومز و همکاران در سال ۲۰۰۹ یک کشتی هوایی با نام YEZ-2 طراحی کرده‌اند و با استفاده از مقدار جرم افزوده‌ای که از بیضی‌گونِ معادل به‌دست آورده‌اند شبیه‌سازی‌های کنترلی را انجام داده‌اند [10,11]. هم‌چنین لی و همکاران در شبیه‌سازی مکانیک پرواز خود از ضرایب استخراج شده برای بیضی‌گون برای جرم افزوده کشتی هوایی مورد نظر خود استفاده کرده‌اند [12]. مولر و همکاران نیز با استفاده از روشی که لمب [13] برای تعیین جرم افزودهٔ بیضی‌گون معرفی کرده‌است برای محاسبه ماتریس جرم افزوده کشتی هوایی استفاده کرده‌اند [14].

اما به‌منظور تعیین دقیق‌تر ماتریس جرم افزوده برای سامانه‌های کشتی هوایی، شبیه‌سازی‌های مختلفی با استفاده از روش‌های مبتنی بر دینامیک سیالات محاسباتی انجام شده‌است. به عنوان مثال، اَزوز و همکاران در سال ۲۰۱۲ با استفاده از مدل‌سازی جریان سیال پتانسیل ماتریس جرم افزوده کشتی هوایی با شکل غیرمتعارف را محاسبه نمودند [15]. تاوری و همکاران در سال ۲۰۱۳ جرم افزودهٔ یک کشتی هوایی بدون سرنشین و با شکل هیبرید با سه لوب مختلف را محاسبه نمود [16] وی در کار دیگری در سال ۲۰۱٤ با استفاده از حل عددی جریان پتانسیل ماتریس جرم افزوده سامانه‌های مختلف کشتی هوایی با شکل‌های مختلف را محاسبه نمودند [17].

در روش‌های کلاسیک دینامیک سیالات محاسباتی مانند روش‌های المان محدود و یا حجم محدود به علت آن‌که کل ناحیهٔ حل شبکه‌بندی می‌شود، تعداد سلول‌های محاسباتی بسیار افزایش می‌یابد، اما در روش المان مرزی تنها سطح جسم شبکه‌بندی می‌شود و تعداد سلول‌های محاسباتی به طرز چشم‌گیری کاهش می‌یابد. با مرور بر مقالاتی که از روش‌های کلاسیک برای تعیین ماتریس جرم افزوده استفاده کرده‌اند ملاحظه می‌شود که به علت هزینهٔ بالای محاسباتی روش‌های کلاسیک، معمولا تعداد معدودی از درایه‌های ماتریس جرم افزوده تعیین می‌شوند، اما با استفاده از روش المان مرزی مقدار تمامی درایه‌ها تعیین خواهند شد.

در مقالهٔ حاضـــر ماتریس جرم افزوده اجســـام مختلف و کشتی هوایی محاسبه شده‌است. بدین منظور کد المان مرزی به زبان فرترن تهیه شده‌است و هندسهٔ جسم با استفاده از نرم‌افزار گمبیت به پانل‌های مثلثی در ســطح تقســیم‌بندی خواهد شــد و فایل شبکه محاسباتی به عنوان ورودی به کد اضافه خواهد شد.

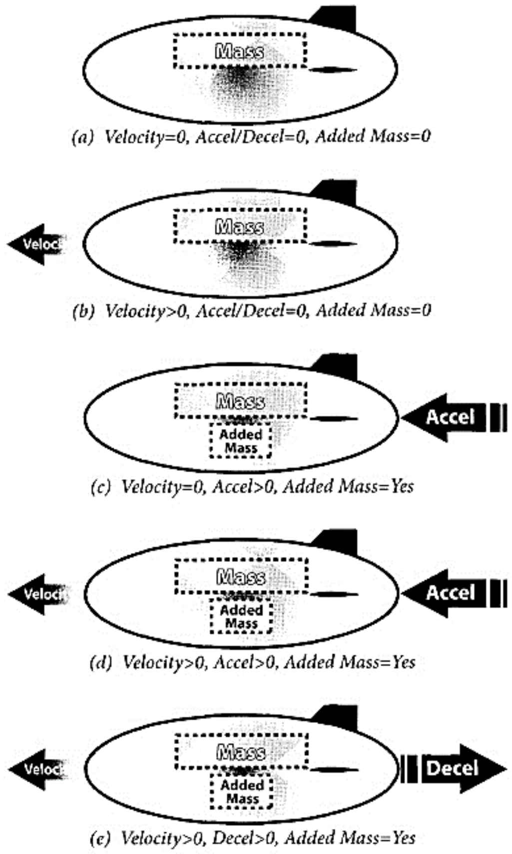
در این مقاله ابتدا تئوری جرم افزوده ارائه خواهد شـــد. سپس به‌منظور صحه سنجی، شبیه سازی بر روی هند سه کره و بیضی‌گون با نسبت منظری مختلف انجام شده‌است و پس از آن هند سهٔ بدنهٔ کشتی هوایی با دو پروفیل بدنهٔ متداول مدل سازی شده است. در نهایت بدنهٔ کامل کشتی هوایی که شامل سبد و بالک‌ها است، شبیه سازی شده و ماتریس جرم افزوده برای این دو حالت به‌دست آمده‌است.

جرم افزوده

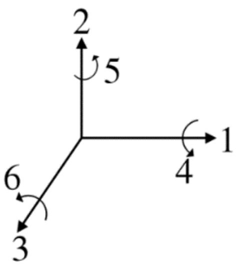
جرم افزودهٔ یک جسم، در مسائلی که در آن چگالی جسم هم‌مرتبه با چگالی سیال اطراف جسم است حائز اهمیت خواهد بود. به عنوان مثال در مسائل مربوط به حرکت کشتی‌های هوایی و مهندسی دریا این نیروها باید محاسبه شود. از این‌رو مقدار جرم افزوده در هواپیماها، موشک‌ها، پهپادها و سایر سامانه‌های مشابه محاسبه نمی‌شود. از طرف دیگر در سامانه‌هایی نظیر زیردریایی‌ها، اژدرها باید جرم افزوده را محاسبه کرد و اثر آن را در شبیه‌سازی‌های دینامیکی لحاظ نمود.

ماتریس جرم افزوده در شبیه‌سازی‌های مکانیک پرواز وارد می‌شود و در صحت شبیه‌سازی‌ها اثر بسزایی خواهد داشت. مطابق اطلاعات ارائه شده در مرجع [11]، در نظر نگرفتن ماتریس جرم افزوده سبب خطای ۱۰۰ درصدی در شبیه‌سازی دینامیکی می‌شود. شکل (**۱**) حالت‌های مختلف پرواز که در آن مقدار جرم افزوده مهم است را نشان می‌دهد [18].

در حالت کلی زمانی که به یک جسم در یک جهت خاص نیرو وارد می‌شود جهت حرکت و نیز جهت شتاب‌گرفتن جسم فقط به جهت نیرو محدود نمی‌شود. بنابراین شتاب‌گیری جسم در سه جهت که جهات اصلی (i=۱،۲،۳) عمود بر هم می‌باشد خواهد بود و علاوه بر آن سه شتاب زاویه‌ای (i=٤،٥،٦) نیز کسب می‌نماید. در نتیجه ماتریس جرم افزوده یک ماتریس $M_{6\times6}$ خواهد بود که اثر هر یک از حرکت‌ها بر روی نیروها و ممان‌ها را نشان می‌دهد. شکل (۲) شمارهٔ اختصاص یافته به هر یک از جهات اصلی را نشان می‌دهد.



شکل ۱ حالت‌های مختلف پروازی که در آن مقدار جرم افزوده حائز اهمیت است [۱۸]



شکل ۲ جهات اصلی

معادلات حاکم

در پژوهش حاضر در شبیه‌سازی جریان سیال از جملات لزجت صرف‌نظر شده است و جریان ایده‌آل به همراه معادله‌ی لاپلاس سه‌بعدی برای بیان رفتار جریان سیال در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{۱}$$

که ϕ تابع پتانسیل جریان است و مشتق نرمال نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z \tag{۲}$$

و $[n_x , n_y , n_z]$ بردار نرمال عمود بر سطح و به سمت خارج از مرز می‌باشد. با جایگزینی معادلهٔ حاکم با معادلهٔ انتگرالی حاصل از قضیهٔ گرین خواهیم داشت:

$$\int_s \frac{\partial G}{\partial n_q}(p,q)\phi(q)dS_q+\frac{1}{2}\phi(q)=\int_s G(p,q)\frac{\partial\phi}{\partial n_q}dS_q \tag{۳}$$

که G تابع گرین است. به لحاظ فیزیکی تابع G نشان‌دهندهٔ یک تابع چشمه است که در نقطهٔ q وجود دارد و در نقطهٔ p اثر آن بررسی می‌شود.

حل عددی معادلات انتگرالی

برای حل عددی معادلات حاکم، معادلات انتگرالی باید به دستگاه معادلات جبری تبدیل شود. بنابراین دستگاه معادلات جبری به‌صورت $\left(M+\frac{1}{2}I\right)\phi=Lv$ به‌دست خواهد آمد. که ϕ و v بیانگر $\phi(p)$و $\partial\phi(p)/\partial n_q$ است و M, L و I نشان‌دهندهٔ ماتریس‌های حل عددی است. در این‌جا به‌منظور تبدیل معادلات انتگرالی به معادلات جبری از روش نقطه‌ای استفاده شده‌است که در این روش سطح جسم به وسیلهٔ المان‌های مختلف تقسیم‌بندی می‌شود و مقدار هر کمیت در مرکز المان در نظر گرفته شده و این مقدار در کل المان ثابت است. هم‌چنین به‌منظور بیان روابط از بیان اپراتوری استفاده شده‌است که در حالت کلی عبارت است از [9]:

$$\left\{L_k\zeta\right\}_\Gamma(p)=\int_\Gamma G_k(p,q)\zeta(q)\,dS_q \tag{٤}$$

$$\{M_k\zeta\}_\Gamma(p)=\int_\Gamma \frac{\partial G_k(p,q)}{\partial n_q}\zeta(q)dS_q \tag{۵}$$

$$\{M^t{}_k\zeta\}_\Gamma(p)=\frac{\partial}{\partial u_p}\int_\Gamma G_k(p,q)\zeta(q)dS_q \tag{٦}$$

$$\{N_k\zeta\}_\Gamma(p)=\frac{\partial}{\partial u_p}\int_\Gamma \frac{\partial G_k(p,q)}{\partial n_q}\zeta(q)dS_q \tag{۷}$$

که Γ نشان دهندهٔ مرز یا بخشی از مرز است، n_q و u_p بردار یکه نرمال بر Γ در نقطه q و p است. $\zeta(q)$ تابع دل‌خواه در نقطهٔ q است و $G_k(p,q)$ تابع گرین است که این تابع برای حالت سه‌بعدی و حل معادلهٔ لاپلاس عبارت است از $G_k(p,q)=1/4\pi r$.

در گام بعد باید مقادیر انتگرالی به‌صورت گسسته بیان شود. در این‌جا داریم که سطح مرز $S=\sum_{j=1}^{n}\Delta S_j$ از پانل‌های مختلفی تشکیل شده‌است و n تعداد پانل‌ها است و مقدار جمع مساحت پانل‌های مختلف برابر با کل سطح مرز جسم است. با ثابت فرض کردن مقدار کمیت‌ها بر روی سطح یک پانل و با جایگذاری در داخل انتگرال‌های معادلات حاکم، فرم گسستهٔ معادلات حاکم به‌دست خواهد آمد.

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(M+\frac{1}{2}I\right)e\right\}\Delta S_j(p_i)\phi_j\approx\sum_{j=1}^{n}\{Le\}\Delta S_j(p_i)v_j \tag{۸}$$

که e تابع یکه است. با تعیین فرم گسسته برای معادلات حاکم دستگاه معادلات به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(M+\frac{1}{2}I\right)\underline{\phi}\approx L\underline{v} \tag{۹}$$

که $[L]_{ij}=[Le]_{\Delta S_j}(p_i)[M]_{ij}=[Me]_{\Delta S_j}(p_i)$, و $\phi,\underline{v}$ بردارهای مقادیر دقیق توابع بر روی مرکز المان می‌باشد. در ضمن با توجه به رابطهٔ (٤) خواهیم داشت:

$$\{L_k\zeta\}_\Gamma(p)\approx\sum_{j=1}^{n}\left[\zeta(p_j)\{L_k e\}_{\Delta\Gamma_j}(p)\right] \tag{۱۰}$$

سایر انتگرال‌ها نیز مشابه انتگرال فوق گسسته شده و در کد محاسباتی اعمال می‌شود [9].

صحه‌سنجی روش عددی

در این قسمت کد المان مرزی صحه‌سنجی شده‌است. بدین منظور از هندسه‌های متداول مانند کره و بیضی‌گون که نتایج حل تحلیلی برای آن‌ها موجود است استفاده شده‌است. هم‌چنین بیضی‌گون با دو نسبت قطربزرگ به کوچک مختلف برای شبیه‌سازی استفاده شده‌است که در ادامه شبیه‌سازی و نتایج هر یک از این مسائل ارائه شده‌است.

جرم افزوده کره

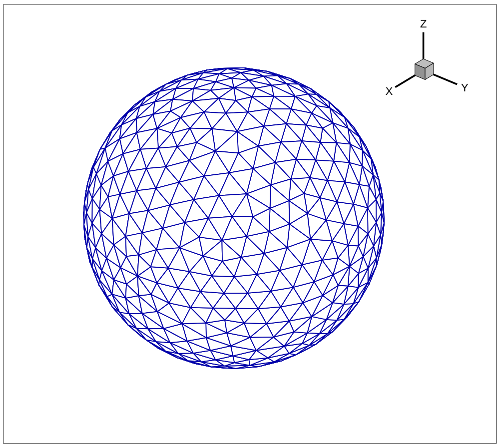
یک کره با شعاع ۱ متر با استفاده از نرم‌افزار گمبیت شبکه بندی شده است و مرکز این کره بر روی مبدأ مختصات قرار دارد. در

شبیه‌سازی حاضر، از سه شبکه درشت، متوسط و ریز استفاده شده‌است و تعداد المان‌ها به ترتیب٦١٠، ١١٩٠ و ٢٦٥٠ المان مثلثی است. شکل (٣) توزیع المان‌های مثلثی بر روی سطح کره را نشان می‌دهد.

در حل تحلیلی جریان حول کره، از اثرات ویسکوزیته سیال صرف نظر شده و جریان به‌صورت جریان پتانسیل در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین حرکت کره به‌صورت خطی در نظر گرفته شده و به علت تقارن هندسی کره در سه صفحه اصلی، سه المان اول قطر اصلی ماتریس جرم افزوده دارای مقدار است و سایر المان‌های ماتریس صفر می‌باشد. با استفاده از حل تحلیلی جریان پتانسیل حول کره خواهیم داشت [19]:

$$M_{ii(i=1,3)} = \frac{2}{3}\pi a^3 \qquad (١١)$$

که a برابر با شعاع کره است.



شکل ٣ شبکه‌بندی کره با المان‌های مثلثی

نتایج مربوط به المان‌های قطری ماتریس جرم افزوده در شبیه‌سازی بر روی سه شبکه مختلف در جدول (١) ارائه شده‌است. همان‌طور که مشخص است با افزایش تعداد المان‌ها خطای شبیه‌سازی به شدت کاهش یافته‌است و به مقادیر تحلیلی کاملاً نزدیک شده‌است. در این حالت بیشینه خطا در شبکهٔ ریز مربوط به المان M_{11} است و حدود ٣٪ است و مقدار خطا در المان‌های M_{22} و M_{33} حدود از ٠/٦٪ است که نشان‌دهندهٔ قابلیت روش استفاده شده در محاسبهٔ جرم افزودهٔ کره است.

جدول ١ مقدار ضرایب M_{11}،M_{22}،M_{33} برای کره در شبکه‌های مختلف

تعداد المان		٦١٠	١١٩٠	٢٦٥٠
M_{11}	BEM	١/٦٩٧	١/٧٦٣	٢/٠٢٢
	تحلیلی	٢/٠٩٠	٢/٠٩٠	٢/٠٩٠
	٪ خطا	١٨/٨	١٥/٦	٣/٢
M_{22}	BEM	١/٦٩٥	١/٧٧٣	٢/٠٧٦
	تحلیلی	٢/٠٩٠	٢/٠٩٠	٢/٠٩٠
	٪ خطا	١٨/٩	١٥/١	٠/٦
M_{33}	BEM	١/٦٩٥	١/٧٧٣	٢/٠٧٦
	تحلیلی	٢/٠٩٠	٢/٠٩٠	٢/٠٩٠
	٪ خطا	١٨/٩	١٥/١	٠/٦

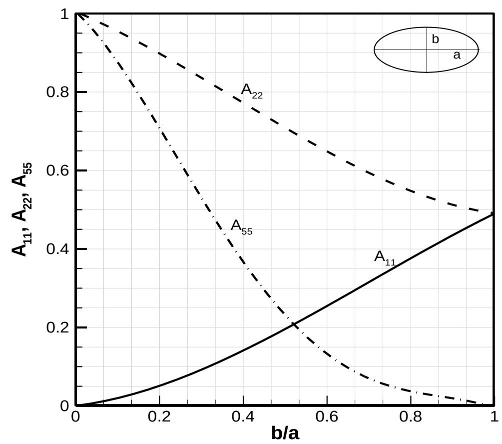
جرم افزوده بیضی‌گون

یکی دیگر از هندسه‌هایی که ماتریس جرم افزوده برای آن به‌صورت تحلیلی به‌دست می‌آید بیضی‌گون است. در این‌جا نیز فرض جریان پتانسیل برای حل تحلیلی برقرار است و دو بیضی‌گون با دو نسبت منظری مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌است. در حالت اول نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک a/b=٢ بوده و حالت دوم برابر با a/b=٣/٨٥ است. علت استفاده از بیضی‌گون با نسبت منظری ٣/٨٥، یکسان شدن نسبت منظری آن با کشتی هوایی با بدنهٔ NPL است. هندسه‌های این دو بیضی‌گون با استفاده از نرم‌افزار گمبیت شبکه‌بندی شده‌است و نتایج تحلیلی برای ضریب‌های مختلف قطری جرم افزوده به‌صورت بدون بعد برای بیضی‌گون در شکل (٤) ارائه شده است.

در بیضی‌گون به علت تقارن، ضرایب غیر قطری و مقدار المان M_{44} صفر است. هم‌چنین نتایج تحلیلی نشان می‌دهد که ضرایب $M_{22}=M_{33}$ و $M_{55}=M_{66}$ است. به‌منظور بی‌بعد سازی، ضرایب M_{11},M_{22},M_{33} از مقدار $4\pi ab^2/3$ استفاده می‌شود و ضرایب M_{55},M_{66} با مقدار $4\pi ab^2(a^2+b^2)/15$ بی‌بعد خواهند شد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M_{11} &= A_{11} \times \frac{4\pi}{3} ab^2 \\ M_{22} = M_{33} &= A_{22} \times \frac{4\pi}{3} ab^2 \\ M_{55} = M_{66} &= A_{55} \times \frac{4\pi}{15} ab^2(a^2+b^2) \end{aligned} \qquad (١٢)$$

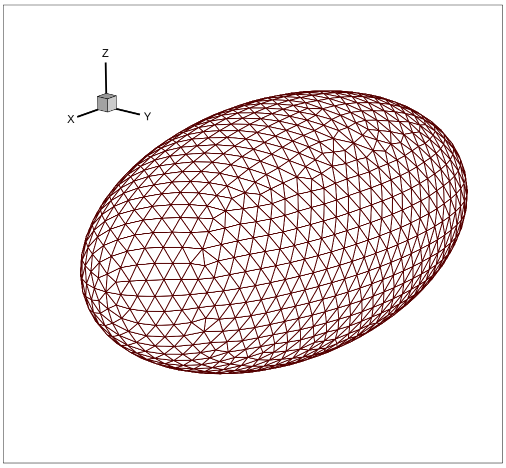
در فرمول فوق b, a شـــعاع کوچک و بزرگ بیضـــی‌گون هستند و ضرایب A_{11},A_{22},A_{55} در شکل (٤) به صورت بی‌بعد برای نسـبت قطرهای مختلف ارائه شــده‌اســت و بدین ترتیب حالات مختلف را می‌توان با اســـتفاده از این نمودار تقریب زد [13].



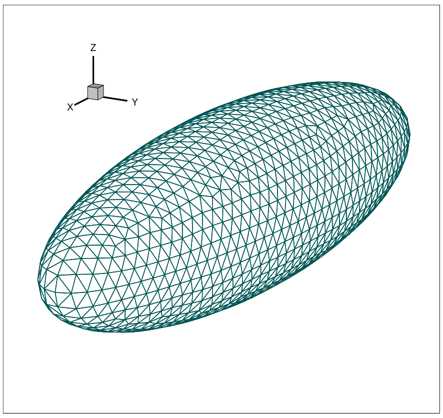
شکل ٤ نمودار ضرایب جرم افزوده برای بیضی‌گون با نسبت قطر بزرگ و کوچک مختلف

جرم افزوده بیضی‌گون با نسبت a/b=۲ در این بخش، ماتریس جرم افزودهٔ بیضی‌گون با نسبت شعاع بزرگ به کوچک a/b=۲ محاسبه شده‌است. اجراهای مختلف بر روی شبکه‌های درشت، متوسط و ریز انجام شده‌است. شکل ۵ شبکه‌بندی مثلثی ایجاد شده در سطح بیضی‌گون را نشان می‌دهد. تعداد المان‌های مثلثی به‌کار گرفته شده در شبکه‌های مختلف به ترتیب، ۱۹۲۸، ۲۶۲۸ و ۳۳۹۶ عدد است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نتایج تحلیلی حاصل از رابطه (۱۲)، در جدول (۲) مقایسه شده‌است. همان‌طور که مشخص است با افزایش تعداد المان‌ها، مقدار خطای شبیه‌سازی نسبت‌به حل تحلیلی بسیار کاهش یافته‌است و در حالت استفاده از شبکهٔ ریز مقدار خطای بیشینه برابر با ٪۳/۲ است.

جرم افزوده بیضی‌گون با نسبت a/b=۳/۸۵ در این بخش نیز مانند حالت قبل بیضی‌گون با نسبت شعاع بزرگ به کوچک a/b=۳/۸۵ شبیه‌سازی شده‌است. با توجه به آن‌که سامانهٔ کشتی هوایی مورد نظر در بخش نتایج، دارای نسبت منظری ۳/۸۵ است، نسبت منظری بیضی‌گون نیز همین مقدار انتخاب شده‌است.



شکل ۵ شبکه‌های محاسباتی مختلف برای بیضی‌گون با نسبت b/۲a=



شکل ٦ شبکه‌های محاسباتی مختلف برای بیضی‌گون با نسبت b/۳a/۸۵=

جدول ۲ مقدار ضرایب بدون بعد A_{11}،A_{22}،A_{33}،A_{55}،A_{66} برای بیضی‌گون با نسبت b/۲a= در شبکه‌های مختلف

	تعداد المان	۱۹۲۸	۲۶۲۸	۳۳۹۶
A_{11}	BEM	۰/۱۷۷	۰/۱۸۳	۰/۱۹۰
	تحلیلی	۰/۱۹۶	۰/۱۹۶	۰/۱۹۶
	٪ خطا	۹/۵	۶/۸	۳/۲
$A_{22}=A_{33}$	BEM	۰/۶۴۶	۰/۶۶۸	۰/۶۹۳
	تحلیلی	۰/۷۰۹	۰/۷۰۹	۰/۷۰۹
	٪ خطا	۸/۹	۵/۸	۲/۳
$A_{55}=A_{66}$	BEM	۰/۲۲۰	۰/۲۲۵	۰/۲۳۱
	تحلیلی	۰/۲۳۲	۰/۲۳۲	۰/۲۳۲
	٪ خطا	۵/۰	۲/۹	۰/۲

شکل (٦) شبکه محاسباتی ایجاد شده بر روی سطح بیضی‌گون با نسبت منظری a/b=۳/۸۵ را نشان می‌دهد. در این‌جا

نیز شبیه‌سازی بر روی سه شبکهٔ محاسباتی درشت، متوسط و ریز با تعداد المان‌های ۱۶۳۰، ۲۶۹۰ و ۳۴۳۰ انجام شده‌است. جدول (۳) مقایسهٔ نتایج تحلیلی و المان مرزی برای ضرایب قطری ماتریس جرم افزوده را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این جدول مشخص است با افزایش تعداد المان‌ها مقدار خطای شبیه‌سازی المان مرزی نسبت‌به حل تحلیلی کاهش داشته‌است و بیشینه خطای محاسباتی در شبکهٔ ۳۴۳۰ برابر با ٪۲/۹ است.

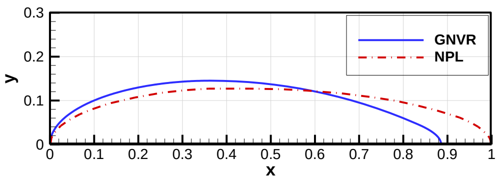
جدول ۳ مقدار ضرایب A_{11}،A_{22}،A_{33}،A_{55}،A_{66} برای بیضی‌گون با نسبت =b/۳a/۸۵ در شبکه‌های مختلف

تعداد المان		۱۶۳۰	۲۶۹۰	۳۴۳۰
A_{11}	BEM	۰/۰۷۰۱	۰/۰۷۲۷	۰/۰۷۳۷
	تحلیلی	۰/۰۷۴۶	۰/۰۷۴۶	۰/۰۷۴۶
	٪ خطا	۶/۰۴	۲/۵۸	۱/۲
$A_{22}=A_{33}$	BEM	۰/۸۰۲	۰/۸۲۹	۰/۸۴۸
	تحلیلی	۰/۸۶۱۶	۰/۸۶۱۶	۰/۸۶۱۶
	٪ خطا	۶/۹۳	۳/۸۰	۱/۶
$A_{55}=A_{66}$	BEM	۰/۵۴۵	۰/۵۶۲	۰/۵۸۳
	تحلیلی	۰/۶۰۱۹	۰/۶۰۱۹	۰/۶۰۱۹
	٪ خطا	۹/۴۴	۶/۷۰	۲/۹

با توجه به نتایج ارائه شده در این بخش ملاحظه شد که روش المان مرزی و کد محاسباتی توسعه داده شده قابلیت محاسبهٔ جرم افزودهٔ اجسام بیضی شکل با دقت بسیار بالا و مقدار خطای کمتر از ٪۳ نسبت‌به حل تحلیلی را داراست. با توجه به آن‌که هندسهٔ کشتی‌های هوایی به بیضی‌گون شباهت زیادی دارد، روش حاضر برای محاسبهٔ ماتریس جرم افزودهٔ کشتی هوایی مورد استفاده قرار خواهد گرفت که در بخش بعد به آن پرداخته شده‌است.

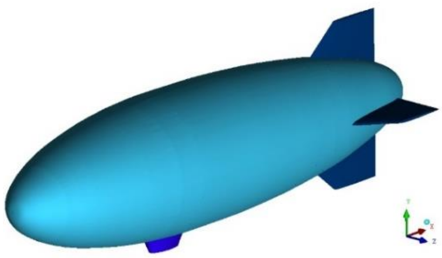
نتایج

پس از صحه‌سنجی کد محاسباتی، شبیه‌سازی المان مرزی برای کشتی هوایی انجام شده‌است. به‌طور کلی، کشتی هوایی دارای اجزای مختلفی مانند بدنه، مجموعهٔ دم و سبد است. با بررسی کشتی‌های هوایی مختلف مشاهده می‌شود که دو پروفیل NPL و GNVR پروفیل‌های متداولی هستند که در طراحی بدنه کشتی هوایی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در پروژهٔ حاضر از هر دو هندسه برای شبیه‌سازی کشتی‌هوایی استفاده شده‌است. هندسهٔ NPL از دو بیضی با قطر کوچک یکسان و قطر بزرگ متفاوت تشکیل شده‌است [18] و در کار حاضر نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بدنه برابر با ۳/۸۵ است. در عوض پروفیل هندسهٔ GNVR از سه منحنی مختلف تشکیل شده‌است. در نوک بدنه از بیضی، در قسمت میانی از دایره و در قسمت انتهایی از پروفیل سهموی استفاده شده‌است [18] و نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک برابر با ۳/۰۵ است. شکل (۷) مقایسه دو پروفیل NPL و GNVR را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است، با توجه به اهمیت به‌سزای نیروی شناوری در کشتی‌های هوایی و وابستگی این نیرو به حجم بدنهٔ کشتی هوایی، ابعاد در دو هندسه طوری تعیین شده‌است که حجم حاصل از دوران دو منحنی یکسان گردد. دو پروفیل نشان داده شده در شکل (۷) نسبت‌به طول پروفیل NPL بی‌بعد شده‌است.



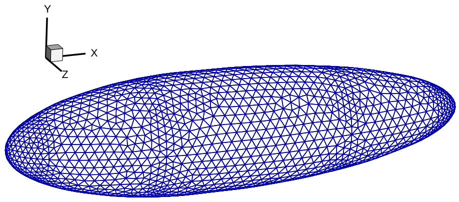
شکل ۷ مقایسه پروفیل بدنه برای دو هندسهٔ NPL و GNVR

در کشتی هوایی شبیه‌سازی شده، در انتهای بدنه نیز چهار دم به‌صورت علامت (+) در نظر گرفته شده‌است که برای کنترل و پایداری کشتی هوایی به‌کار گرفته می‌شود. هم‌چنین یک سبد نیز در زیر بدنهٔ کشتی هوایی برای قرارگیری اجزای مختلف مانند باتری‌ها، کامپیوتر پرواز، موتورها و... قرار گرفته‌است. هر یک از این متعلقات به‌طور جداگانه بر روی هر دو هندسهٔ بدنه سوار شده و مدل‌سازی برای هر دو هندسهٔ مختلف انجام شده‌است. شکل (۸)، نمای کلی کشتی هوایی مورد نظر را نشان می‌دهد.

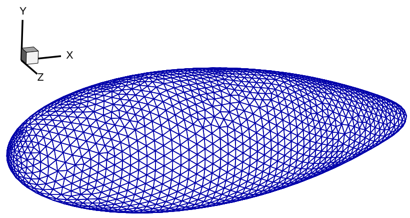

شکل ۸ نمای کلی هندسهٔ کشتی هوایی

شبیه‌سازی المان مرزی بدنه کشتی هوایی

در این بخش، هندسهٔ بدنه، بدون متعلقات مجموعهٔ دم و سبد شبیه‌سازی شده‌است. دو بدنه با استفاده از المان‌های مثلثی شبکه‌بندی شده‌است و در شکل (۹) شبکهٔ محاسباتی ایجاد شده نشان داده شده‌است.



(الف)



(ب)

شکل ۹ شبکه‌بندی مثلثی ایجاد شده بر روی بدنه کشتی هوایی (الف) هندسهٔ NPL (ب) هندسهٔ GNVR

مقادیر مربوط به المان های قطری و غیرقطری ماتریس جرم افزودهٔ بدنهٔ کشتی هوایی در جدول (٤) ارائه شده‌است. دراین شبیه سازی ٤٣٦٢ المان برای پروفیل NPL و ٤٥٠٠ المان برای پروفیل GNVR در نظر گرفته شده‌است. المان‌های ماتریس جرم افزوده به‌صورت بدون بعد استخراج شده‌است و نحوهٔ بی‌بعدسازی ضرایب به‌صورت زیر است.

$$A_{ij} = \frac{M_{ij}}{\frac{1}{2}\rho L^3{}_{ref}} (i, j = 1,2,3) \qquad (۱۳)$$

$$A_{ij} = \frac{M_{ij}}{\frac{1}{2}\rho L^5{}_{ref}} (i = j = 4,5,6) \qquad (۱٤)$$

و برای سایر المان‌های ماتریس جرم افزوده:

$$A_{ij} = \frac{M_{ij}}{\frac{1}{2}\rho L^4{}_{ref}} \qquad (۱٥)$$

که ρ بیانگر چگالی سیال و L_{ref} نشان‌دهندهٔ طول مشخصهٔ کشتی هوایی است که معمولاً برابر با طول کشتی هوایی در نظر گرفته می‌شود. جدول ٤ مقادیر بی‌بعد المان‌های ماتریس جرم افزوده را برای دو پروفیل NPL و GNVR نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که L_{ref} برای هر کدام از پروفیل‌ها مطابق با طول همان پروفیل در نظر گرفته شده‌است.

همان‌طور که در جدول زیر مشخص است، مقدار A_{44} برای هر دو پروفیل صفر به‌دست آمده و این مسئله با فیزیک حاکم بر مسئله کاملاً سازگار است. در واقع به علت عدم وجود بالک‌ها، مقاومت جریان نسبت‌به حرکت رول بسیار کم می شود و مقدار این المان صفر به‌دست می‌آید. این امر مشابه بیضی‌گون است و در مورد بیضی‌گون نیز مقدار المان A_{44} نیز به لحاظ تحلیلی صفر محاسبه به‌دست می‌آید. هم‌چنین با توجه به تقارن مسأله در صفحات xz و xy، مقادیر المان‌های A_{22} و A_{33} با هم برابر است. این امر در مورد المان‌های A_{55} و A_{66} نیز برقرار است.

جدول ٤ مقادیر جرم افزوده برای بدنهٔ NPL و GNVR

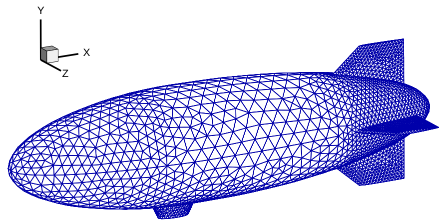
درایه ماتریس	بدنه NPL	بدنه GNVR
A_{11}	۰/۰۰٤٥۰	۰/۰۱۰۰۹
A_{22}	۰/۰٥۰٦٦	۰/۰۷۳۱۱
A_{33}	۰/۰٥۰٦۷	۰/۰۷۲۸٦
A_{44}	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
A_{55}	۰/۰۰۱۸۷	۰/۰۰۲٤۱
A_{66}	۰/۰۰۱۸۸	۰/۰۰۲٤۲
A_{26}	۰/۰۰۰۲٤	۰/۰۰۳۱۷
A_{35}	−۰/۰۰۰۲٤	−۰/۰۰۳۲۳

بر خلاف بیضی‌گون در بدنهٔ کشتی هوایی به علت عدم تقارن نسبت‌به صفحهٔ yz، المان‌های غیر قطری مقدار پیدا می‌کنند. مقادیر غیر قطری ماتریس جرم افزوده برای هر دو پروفیل در جدول (٤) ارائه شده‌است. در بدنهٔ کشتی هوایی المان‌های A_{26} و A_{35} غیر صفر هستند و سایر المان‌های غیرقطری تقریباً صفر می‌باشند.

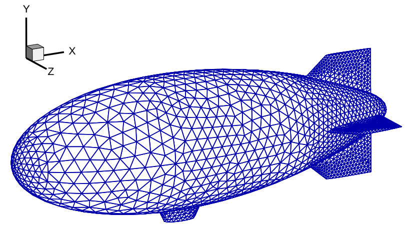
شبیه‌سازی المان مرزی کشتی هوایی با متعلقات دم و سبد

در گام بعد، شبیه‌سازی المان مرزی برای کشتی هوایی به همراه متعلقات مجموعهٔ دم و سبد انجام و ضرایب ماتریس جرم افزوده استخراج شده‌است. شکل (۱۰) شبکه محاسباتی ایجاد شده برای

شبیه‌سازی کشتی هوایی با دو پروفیل را نشان می‌دهد. در اینجا نیز حجم بدنهٔ دو کشتی هوایی یکسان است. همان‌طور که در شکل مشخص است، در المان‌بندی بالک‌ها و سبد از المان‌های ریزتر استفاده شده‌است.



(ب)

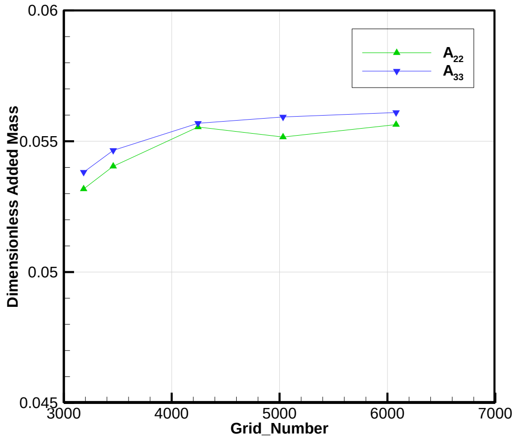


(ب)

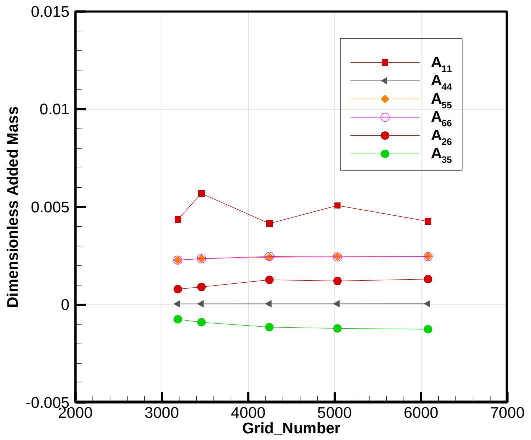
شکل ۱۰ شبکه‌بندی مثلثی ایجاد شده بر روی کشتی هوایی (الف) هندسهٔ NPL (ب) هندسهٔ GNVR

به‌منظور بررسی استقلال حل المان مرزی از شبکه محاسباتی، شبیه‌سازی بر روی پنج شبکه با تعداد المان‌های مختلف انجام شده‌است. تعداد المان‌های به‌کار گرفته شده در شبیه‌سازی با هندسهٔ NPL عبارت‌است از ۳۱۸۴، ۳۵۴۸، ۴۲۴۴، ۵۰۳۲ و ۶۰۵۰. نتایج مربوط به تغییرات المان‌های ماتریس جرم افزوده با تغییر تعداد شبکهٔ محاسباتی در پروفیل NPL در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشخص است، با افزایش تعداد المان‌های محاسباتی مقادیر جرم افزوده تقریباً ثابت شده‌است که نشان‌دهندهٔ استقلال حل از شبکهٔ محاسباتی است. در این حالت مقادیر المان‌های A_{22} و A_{33} و نیز A_{55} و A_{66} به هم نزدیک است. اما به علت این‌که اثر وجود سبد کشتی هوایی در حرکت کشتی در جهت z بیشتر از جهت y است، مقدار المان A_{33} بزرگ‌تر از A_{22} به‌دست خواهد آمد.

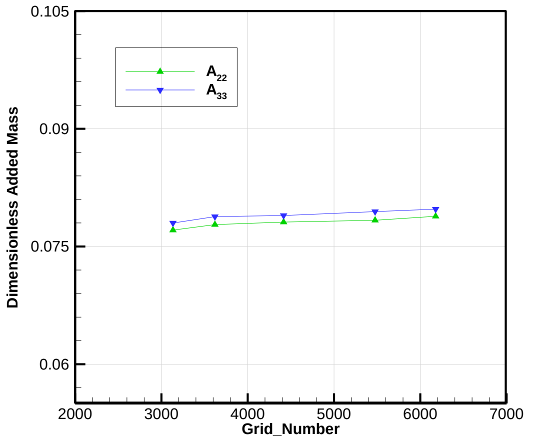
مشابه با هندسهٔ NPL، در شبیه‌سازی کشتی هوایی با هندسهٔ GNVR از ۳۱۳۴، ۳۶۲۰، ۴۴۱۶، ۵۴۷۶ و ۶۱۷۸ شبکه محاسباتی استفاده شده‌است و نمودار تغییرات ضرایب جرم افزوده با تغییر تعداد المان در شکل‌های (۱۳) و (۱۴) ارائه شده‌است. در این‌جا نیز با افزایش تعداد المان‌های محاسباتی، مقدار جرم افزوده تقریباً برای تمامی المان‌های ماتریس ثابت شده‌است.



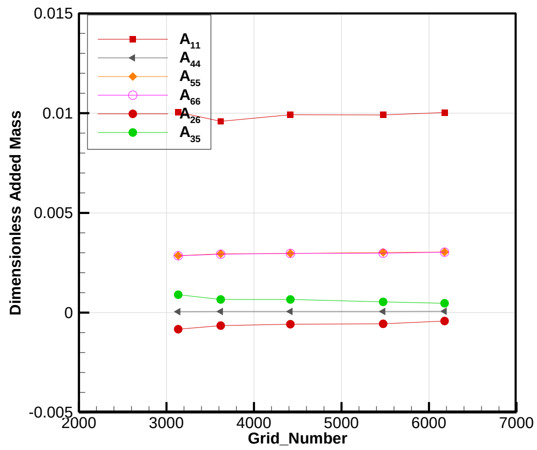
شکل ۱۱ تغییرات المان‌های A_{22} و A_{33} در ماتریس جرم افزوده کشتی هوایی با پروفیل بدنه NPL



شکل ۱۲ تغییرات المان‌های A_{11}، A_{44}، A_{55}، A_{66}، A_{26}، A_{35} در ماتریس جرم افزوده کشتی هوایی با پروفیل بدنه NPL



شکل ۱۳ تغییرات ضرایب جرم افزوده A_{33}، A_{22} با تغییر تعداد المان در کشتی هوایی با پروفیل بدنه GNVR



شکل ۱٤ تغییرات ضرایب جرم افزوده A_{35}، A_{26}، A_{66}، A_{55}، A_{44}، A_{11} با تغییر تعداد المان در کشتی هوایی با پروفیل بدنه GNVR

مشابه با حالت قبل، در پروفیل GNVR، مقدار المان‌های A_{22},A_{33} و نیز A_{55},A_{66} بسیار به هم نزدیک است و تفاوت جزئی ایجاد شده در اثر وجود سبد ایجاد شده‌است.

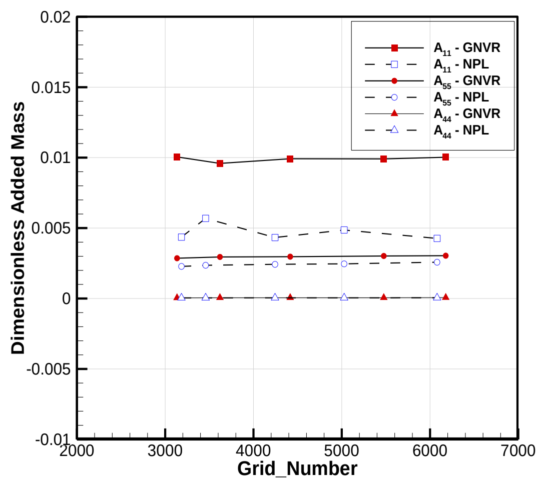
جدول (٥) نتایج مربوط به مقادیر المان‌های ماتریس جرم افزوده با دو پروفیل NPL و GNVR را نشان می‌دهد. در این‌جا بر خلاف بدنهٔ کشتی هوایی مقدار المان A_{44} صفر نخواهد بود. این امر به علت اضافه شدن بالک‌ها به بدنه و مقاومت جریان نسبت‌به حرکت رول کشتی هوایی ایجاد شده‌است. در این حالت نیز دو المان غیر قطری A_{35} و A_{26} حائز اهمیت خواهند شد و سایر المان‌های غیر قطری تقریباً صفر خواهد شد.

جدول ٥ ضرایب بدون بعد ماتریس جرم افزوده برای کشتی هوایی با پروفیل بدنه NPL و GNVR

درایه ماتریس	کشتی با بدنه NPL	کشتی با بدنه GNVR
A_{11}	۰/۰۰۴۲۶	۰/۰۱۰۰۳
A_{22}	۰/۰۵۶۳	۰/۰۷۸۸۵
A_{33}	۰/۰۵۶۹۹	۰/۰۷۹۷۵
A_{44}	۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۰۰۰۰۶۵
A_{55}	۰/۰۰۲۵۷	/۰۰۳۰۴۳
A_{66}	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۰۳۰۳
A_{26}	۰/۰۰۱۳۰	−۰/۰۰۰۴۲
A_{35}	−۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۰۴۷

شکل (۱٥) مقایسه بین برخی از المان‌های ماتریس جرم افزوده برای کشتی هوایی با دو پروفیل NPL و GNVR ارائه شده‌است. همان‌طور که مشخص است، مقادیر المان‌ها برای پروفیل GNVR بزرگ‌تر از مقادیر متناظر در پروفیل NPL است. هم‌چنین برای مقایسهٔ دقیق‌تر تفاوت دو هندسه، درصد اختلاف المان های ماتریس جرم افزوده بین دو پروفیل در جدول (٦) ارائه شده‌است. میزان اختلاف برای المان A_{11} و درایه‌ها غیر قطری A_{26} و A_{35} نسبت‌به سایر المان‌ها بیشتر است و درایه‌های A_{66} و A_{55} کمترین اختلاف را دارند. نکتهٔ مهمی که باید در ضرایب به‌دست آمده مد نظر قرار گیرد این است که هر کدام از ضرایب با توجه به طول بدنهٔ خود بدون بعد شده‌اند و مقدار طولی که برای بدون بعدسازی استفاده شده‌است در هر دو پروفیل یکسان نیست.

البته لازم به ذکر است که هر دو هندسهٔ بررسی شده در این پژوهش از هندسه‌های متداول در ساخت کشتی‌های هوایی هستند و مقدار ماتریس جرم افزوده به تنهایی شاخص مناسبی برای انتخاب بین دو هندسهٔ فوق نیست. به‌منظور انتخاب صحیح بین هندسه‌های فوق باید نتایج فوق در شبیه‌سازی‌های دینامیکی وارد شوند و سپس مانورپذیری و کنترل‌پذیری به عنوان معیار برای انتخاب بین این دو پروفیل قرار گیرد.



شکل ۱٥ مقایسه نتایج A_{55}، A_{44}، A_{11} بین دو کشتی هوایی برای دو بدنهٔ NPL و GNVR برای شبکه‌های محاسباتی مختلف

جدول ٦ درصد تفاوت نتایج برای مقادیر جرم افزوده برای دو بدنهٔ مختلف NPL و GNVR

المان	$\frac{\lvert A_{ij,NPL} - A_{ij,GNVR}\rvert}{\lvert A_{ij,NPL}\rvert} \times 100$
A_{11}	۱۳۵/۱
A_{22}	٤۱/۷
A_{33}	۳۹/۹
A_{44}	۲۲/٤
A_{55}	۱۸/۱
A_{66}	۲۱/٤
A_{26}	۱۳۲/٤
A_{35}	۱۳۰/۸

نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر از روش المان مرزی به‌منظور تعیین جرم افزوده کشتی هوایی استفاده شده‌است. بدین منظور کد محاسباتی با زبان فرترن و روش فوق توسعه داده شده‌است. شبکه محاسباتی مورد نیاز به‌صورت مثلثی بر روی سطح جسم و با استفاده از نرم‌افزار گمبیت ایجاد شده و به‌صورت ورودی به کد داده شده‌است. ابتدا به‌منظور صحه‌سنجیِ کد محاسباتی، ماتریس جرم افزوده برای هندسه‌های متداول مانند کره و بیضی‌گون شبیه‌سازی شده‌است. مقادیر به‌دست آمده برای کره و بیضی‌گون با نتایج حل تحلیلی برای جریان پتانسیل مقایسه شده‌است و نتایج تطابق بسیار خوبی با حل تحلیلی دارد و مقدار خطا نسبت‌به حل تحلیلی کمتر از ۰.۳٪ به‌دست آمده‌است. سپس کد محاسباتی برای دو کشتی‌هوایی با دو پروفیل NPL و GNVR استفاده شده‌است. دو پروفیل فوق به‌صورت تنها و نیز به همراه مجموعهٔ دم و سبد مدل‌سازی شده‌است و نتایج المان‌های ماتریس جرم افزوده به‌صورت بدون بعد برای هر حالت ارائه شده‌است. در حالت بدنه تنها، ضریب A_{44} صفر به‌دست آمده‌است و با اضافه کردن بالک‌ها این المان دارای مقدار شده‌است که نشان‌دهندهٔ مقاومت بالک‌ها نسبت‌به حرکت رول کشتی هوایی است. هم‌چنین برخلاف هندسهٔ بیضی‌گون که ضرایب غیر قطری صفر است، در این حالت به علت عدم تقارن نسبت‌به صفحه yz، صفر نخواهد بود و این مقادیر نیز برای کشتی هوایی محاسبه شده‌است. با توجه به نتایج، مشاهده شد که تمامی المان‌های جرم افزودهٔ کشتی هوایی با بدنه GNVR بیشتر از بدنهٔ NPL است. با توجه به آن‌که روش المان مرزی تنها از شبکه محاسباتی در سطح جسم استفاده می‌کند تعداد المان‌های محاسباتی به شدت کاهش یافته‌است و در نتیجه سرعت انجام محاسبات بسیار بالاتر از روش‌های کلاسیک CFD است. در ضمن در روش حاضر با حل جریان پتانسیل تمامی ضرایب ماتریس جرم افزوده با سرعت بالا محاسبه می‌شود و امکان بهینه‌سازی هندسی در شکل و ابعاد سطوح کنترلی در طراحی کشتی هوایی فراهم می‌شود.

فهرست علائم

A_{ij}	المان بدون بعد ماتریس جرم افزوده
a	شعاع بزرگ بیضی‌گون
b	شعاع کوچک بیضی‌گون
G	تابع گرین
L_{ref}	طول مشخصه
m_{added}	مقدار جرم افزوده
M_{ij}	المان ماتریس جرم افزوده
n	جهت نرمال بر سطح
S	مساحت
v	مشتق تابع پتانسیل
Φ	تابع پتانسیل جریان
ζ	تابع دل‌خواه

واژه‌نامه

جرم افزوده	Added Mass
روش المان مرزی	Boundary Element Method
تابع گرین	Green Function
کشتی هوایی	Airship
بالن هواایست	Aerostat
پروفیل بدنه	Body Profile
ماتریس جرم افزوده	Added Mass Matrix

مراجع

1. Liao, L., and Pasternak, I., "A Review of Airship Structural Research and Development", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 45, No. 4-5, Pp. 83-96, (2009).
2. Li, Y., Nahon, M., and Sharf, I., "Airship Dynamics Modeling: A Literature Review", *Progress in aerospace sciences*, Vol. 47, No. 3, Pp. 217-39, (2011).
3. Banerjee, P. K. and Butterfield, R., "Boundary Element Methods in Engineering Science", *McGraw-Hill London*, Vol. 17: (1981).
4. Au, M., and Brebbia, C., "Numerical Prediction of Wave Forces Using the Boundary Element Method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 6, No. 4, Pp. 218-28, (1982).
5. Choi, Y. R., Hong, S. Y., and Choi, H. S., "An Analysis of Second-Order Wave Forces on Floating Bodies by Using a Higher-Order Boundary Element Method", *Ocean Engineering*, Vol. 28, No. 1, Pp. 117-38, (2001).
6. Zhou, Z., Lo, E. Y., and Tan, S., "Effect of Shallow and Narrow Water on Added Mass of Cylinders with Various Cross-Sectional Shapes", *Ocean engineering*, Vol. 32, No. 10, Pp. 1199-215, (2005).
7. Lin, Z., and Liao, S., "Calculation of Added Mass Coefficients of 3d Complicated Underwater Bodies by Fmbem", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 1, Pp. 187-94, (2011).
8. Ghassemi, H., and Yari, E., "The Added Mass Coefficient Computation of Sphere, Ellipsoid and Marine Propellers Using Boundary Element Method", *Polish Maritime Research*, Vol. 18, No. 1, Pp. 17-26, (2011).
9. Mirzaei, D., Jafarian, A., Badri, M. A., and Zamani, M. R., "Evaluation of Added Mass for an Underwater Vehicle Using Boundary Element Method", *Tabriz Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 47, No. 3, Pp. 243-50, (2017).
10. Gomes, S. B. V., "An investigation into the flight dynamics of airships with application to the YEZ-2A", PhD diss., Cranfield University, (1990).
11. Gomes, S. B. V., and Ramos, J. G., "Airship Dynamic Modeling for Autonomous Operation", Paper presented at the Proceedings, 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 98CH36146), (1998).
12. Li, Y., Nahon, M., and Sharf, I., "Dynamics Modeling and Simulation of Flexible Airships", *AIAA journal*, Vol. 47, No. 3, Pp. 592-605, (2009).
13. H. Lamb, "Hydrodynamics", Reprint of the 1932 sixth edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1993)
14. Mueller, J., Paluszek, M., and Zhao, Y., "Development of an Aerodynamic Model and Control Law Design for a High Altitude Airship", *AIAA 3rd Unmanned Unlimited Technical Conference*, Workshop and Exhibit, (2004).
15. Azouz, N., Chaabani, S., Lerbet, J., and Abichou, A., "Computation of the Added Masses of an Unconventional Airship", *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2012, Article ID 714627, Pp.19 , (2012).
16. Tuveri, M., Ceruti, A., Persiani, F., and Marzocca, P., "A Mesh Based Approach for Unconventional Unmanned Airship Added Masses Computation", SAE Technical Paper, (2013).
17. Tuveri, M., Ceruti, A., and Marzocca, P., "Added Masses Computation for Unconventional Airships and Aerostats through Geometric Shape Evaluation and Meshing", *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*,Vol. 15, No. 3, Pp. 241-57, (2014).
18. Kanikdale, T., Marathe, A., and Pant, R., "Multi-Disciplinary Optimization of Airship Envelope Shape", *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, (2004).
19. Currie IG., "Fundamental mechanics of fluids", CRC press, (2016).